1.3. Legătura cartografiei cu alte științe

Cartografia este legată de alte științe naturale, tehnice, filozofice etc., cu care se găsește într-o interdependență evolutivă. Cartografia a preluat concepte ale altor științe, dar a și contribuit la dezvoltarea acestora.

O deosebită importanță o au legăturile cu științele Pământului (geoștiințele) și ale planetelor care includ: geodezia, topografia, fotogrammetria, teledetecția, geografia, ecologia, astronomia, planetologia etc.

Elementele elipsoidului terestru, studiate de geodezie, sunt strict necesare pentru calculul elementelor proiecțiilor cartografice.

Coordonatele planimetrice și altimetrice ale unor puncte necesare întocmirii hărților sunt puse la dispoziție de geodezie, topografie și fotogrammetrie.

Complexitatea legăturii dintre cartografie și geografie este dată atât de rolul cunoștințelor geografice în înțelegerea naturii și societății, cât și de utilizarea de către geografie a cartografiei și a produselor cartografice în studierea problemelor geografice specifice.

Legături similare există cu științele economice, sociale, cu istoria, arheologia, etnografia și alte discipline, împreună cu care formează o bază pentru cartografierea tematică și pentru utilizarea hărților într-un spectru larg de scopuri științifice sau aplicative.

Dezvoltarea conceptului teoretic de ***sistem cartografic***, a metodelor de modelare în cartografie se bazează pe logică și filozofie (teoria reflectării, teoria modelării, logica formală, analiza sistemică ș.a.).

Cartografia are legături cu științele matematice (analiza matematică, geometria analitică, statistica și teoria informației, teoria grafelor ș.a.), care sunt aplicate în teoria proiecțiilor cartografice, modelarea matematică și cartografică, managementul producției cartografice.

Cartografia are legături foarte importante cu ingineria și automatica (ingineria sistemelor, electronica, ingineria semiconductoarelor, ingineria laserilor, ingineria chimică, poligrafia ș.a.).

A câștigat noi valențe *legătura cartografiei cu teoria conducerii sistemelor, informatica și cibernetica.*

Interacțiunea cartografiei cu alte științe și tendința sa de a satisface necesitățile practice conduc la formarea a ***noi discipline cartografice***: 1) *de absorție* - care apar când noua ramură este mai puternică decât cea tradițională (de exemplu, *cartometria* este considerată în prezent independentă de utilizarea generală a hărților); 2) *de graniță* - ***cartografia geologică, cartografia de aeronavigație, cartografia medicală*** etc.; 3) *nodale* - formând sfera contactelor între cartografie și alte științe și metode avansate de cercetare (de exemplu, ***cartografia planetară*** - bazată pe cartografie, planetologie, astronomie și

teledetecție); 4) *de legătură* - care acoperă ramurile relaționate, umplu golurile apărute pe timpul diferențierii cunoștințelor științifice (de exemplu, geoiconica ce unește cartografia, fotogrammetria, teledetecția și grafica cu calculatorul).

O *legătură deosebită o are cartografia cu geoinformatica*, ducând la apariția ***cartografiei asistate de calculator***, dezvoltată separat sau ca parte componentă a sistemelor informaționale (informatice) geografice (**S.I.G.**). Legăturile cartografiei cu **S.I.G.** sunt date de aspecte, ca: 1) hărțile topografice și tematice constituie sursa principală a geoinformației organizate temporal și spațial; 2) hărțile sunt mijlocul principal de interpretare topografică sau geografică și de organizare a altor informații folosite în **S.I.G.** (statistică, analitică, de teledetecție etc.); 3) analiza cartografică permite determinarea eficientă a regularităților și neregularităților geografice și topografice, iar modelarea matematico-cartografică este metoda de bază a transformării informației în procesul de management; 4) imaginea cartografică este cea mai potrivită formă de prezentare la utilizatori a ieșirilor oricărui **S.I.G.** (hărți obținute automat, modele tridimensionale, videohărți etc.)

1.4. Cartografia matematică - ramură a cartografiei

1.4.1. *Planuri, hărți și atlase*

***Prin plan topografic** se înțelege reprezentarea grafică la o anumită scară, a unei suprafețe mici de teren.* Dimensiunile mici ale suprafeței de teren se aleg astfel încât curbura Pământului este neglijată. Proiectarea pe plan a punctelor suprafeței se face ortogonal.

Harta** este o reprezentare convențională precisă și generalizată, pe o suprafață plană, a unei suprafețe dintr-un spațiu multidimensional a obiectivelor și fenomenelor din acest spațiu la un moment dat.* În cazul spațiului terestru, pe hartă poate fi reprezentată întreaga suprafață a Pământului sau numai o parte a acesteia, ținând seama de curbura Pământului. Pentru transpunerea pe hartă a punctelor de pe suprafața terestră sau din spațiul tridimensional al Pământului, se folosește un procedeu matematic numit ***proiecție cartografică ales în funcție de destinația hărții, mărimea zonei de cartografiat etc.

Hărțile și planurile fac parte din subclasa geoimaginilor plane (§ 1.1.1.).

Pe măsură ce scara hărții se micșorează, harta este o geoimagine de ansamblu, dând mai puține detalii.

După *valoarea scării*, ***hărțile*** se împart în trei categorii:

- *hărți la scări mari* sau *hărți topografice* (1:25000 - 1:200000);
- *hărți la scări mijlocii* sau *hărți topografice de ansamblu* (1:200000- - 1:1000000);

- *hărţi la scări mici* sau *hărţi geografice*, cu scări mai mici de 1:1000000 (sunt, în general, *hărţi murale* sau *hărţi din atlase*).

După *conţinut*, ***hărţile*** pot fi:

- *hărţi geografice generale* (din care fac parte şi hărţile topografice la scări mari şi mijlocii);
- *hărţi speciale* sau *tematice* (pe care se scot în evidenţă anumite elemente ale terenului sau ale obiectelor şi fenomenelor referite la acesta).

Hărţile speciale se pot împărţi în:

- *hărţi speciale fizico-geografice* (hipsometrice, morfologice, ale energiei reliefului, climatice sau sinoptice, pedologice, biogeografice, fizico-geografice complexe etc.);
- *hărţi speciale social-economice* (ale populaţiei, economice, cadastrale, de sistematizare, politico-administrative etc.).

După *teritoriul reprezentat*, ***hărţile*** pot fi:

- *universale* (*planisfere* sau *planigloburi*) pe care se reprezintă toată suprafaţa Pământului;
- *ale emisferelor*;
- *ale oceanelor şi mărilor*;
- *ale grupelor de continente*;
- *ale continentelor sau ale unor părţi mari din ele*;
- *ale statelor*;
- *ale unităţilor administrative ale statelor* etc.

După *destinaţie*, ***hărţile*** pot fi: *de navigaţie* (maritimă, aeriană sau terestră), *turistice, ale drumurilor, militare, şcolare* etc.

După *numărul culorilor* hărţilor, ele pot fi *monocrome* sau *policrome*.

După *forma de prezentare*, ***hărţile*** pot fi *analogice* sau *numerice*. *Hărţile analogice sunt hărţile clasice cunoscute, reprezentate pe hârtie, material plastic etc. sau hărţile electronice reprezentate pe ecranul unui display grafic sau pe ecranul TV, preluate cu o cameră TV şi memorate pe benzi video.*

Hărţile numerice sunt hărţi electronice obţinute prin transformarea în date numerice vectoriale sau raster a hărţilor clasice sau a fotogramelor şi înregistrărilor de teledetecţie, stocate pe suporturi compatibile cu calculatorul electronic şi reprezentate la nevoie pe ecranul grafic al unui display.

Atlasele *sunt colecţii de hărţi construite după un program stabilit, întocmite şi editate într-un scop unitar* (Năstase, 1983).

După *conţinut*, ***atlasele*** se împart în *atlase generale* şi *atlase speciale* sau *tematice*.

Denumirea atlaselor este dată de tipul hărţilor conţinute. Atlasele naţionale sunt opere cartografice enciclopedice complexe, fundamentale, care cuprind, de regulă: hărţi ale mediului fizic, ale populaţiei, de geografie economică; hărţi ale problemelor culturale; hărţi administrative. Atlasele pot fi clasificate şi după *criterii*, ca: *teritoriul reprezentat; destinaţie* sau *scop; mod de utilizare* etc.

Atlasele electronice sunt formate din hărţi electronice (videohărţi sau hărţi digitale) şi permit diseminarea rapidă a informaţiilor de conţinut, chiar la mare distanţă.

1.4.2. *Importanţa hărţilor*

Hărţile au apărut din necesităţile practicii.

În lumea complexă de astăzi, sunt folosite pentru rezolvarea unor probleme economice, ecologice, naţionale, militare etc., într-un spectru larg de situaţii, de la poluarea mediului până la securitatea statului.

Controlul geoinformaţiei permite organizarea cercetării ştiinţifice, luarea unor decizii economice şi politice importante, dezvoltarea culturii şi învăţământului, furnizarea informaţiei spaţiale la diferite niveluri pentru organizarea managementului mediului înconjurător (naturii şi societăţii).

Importanţa competenţei cartografice a tuturor utilizatorilor existenţi şi potenţiali ai geoinformaţiei, respectiv ai hărţii este în creştere, această competenţă fiind prerogativul nu doar al oamenilor de ştiinţă, ci şi al tuturor membrilor societăţii.

Se poate spune, fără exagerare, că în prezent omul ar trebui să folosească hărţile şi, în general, geoimaginile cum foloseşte calculatorul electronic personal.

1.4.3. *Problemele cartografiei matematice*

Suprafaţa fizică a Pământului este complicată şi neregulată; ca atare, se aproximează cu o suprafaţă matematică cu o formă regulată (în practică, elipsoidul de rotaţie şi sfera).

Reprezentarea elementelor suprafeţei regulate pe un plan se face printr-o proiecţie cartografică.

Cartografia matematică *studiază proprietăţile proiecţiilor cartografice, stabileşte legătura dintre coordonatele punctelor suprafeţei terestre şi coordonatele imaginilor lor de pe hartă, studiază deformările care iau naştere prin reprezentare şi proprietăţile reprezentării pe plan ale diferitelor curbe de pe suprafaţa terestră.*

Pe scurt, ***cartografia matematică*** *dă baza matematică a tuturor hărţilor ce se întocmesc.* Alegerea celei mai bune proiecţii pentru realizarea unei hărţi are importanţă deosebită în utilizarea hărţilor, în special la rezolvarea unor probleme cartografice care implică determinarea prin măsurare sau prin calcul a distanțelor, unghiurilor sau suprafețelor etc.

2. BAZELE REPREZENTĂRII ELIPSOIDULUI PE PLAN

2.1. Elementele elipsoidului terestru

2.1.1. *Aproximarea suprafeței terestre*

Forma Pământului determină caracterul deformărilor la reprezentarea suprafeței sale pe o suprafață plană.

Pământului îi corespunde o formă proprie, geoidul, suprafața echipotențială ce coincide cu suprafața liniștită a mărilor și oceanelor, prelungită pe sub continente și care este perpendiculară în orice punct al ei pe direcția verticalei în punctul respectiv. Măsurătorile geodezice, topografice sau fotogrammetrice se execută pe suprafața topografică sau pe modelul acesteia.

Suprafața reală a Pământului și suprafața geoidului sunt neregulate și, ca atare, a fost necesară adoptarea unor suprafețe geometrice, definite riguros matematic, care să difere cât mai puțin de geoid.

Aceste *corpuri geometrice ce aproximează Pământul* sunt *elipsoidul de rotație* și *sfera*.

2.1.2. *Elipsoidul terestru*

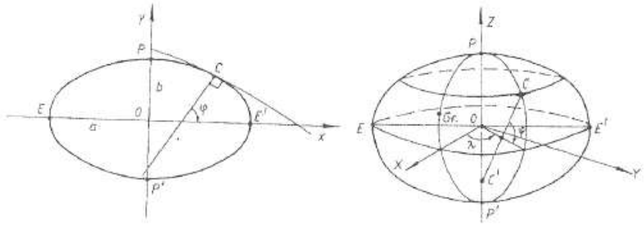
Elipsoidul de rotație rezultă din rotirea unei elipse în jurul axei sale mici (*figura 2.1*). Axa de rotație a elipsei este comună cu axa de rotație a Pământului. Elipsa meridiană raportată la sistemul de axe Oxy este arătată în *figura 2.1.a*.

Secțiunile elipsoidului terestru făcute cu plane care trec prin axa de rotație formează curbe care sunt elipse, ce se numesc ***elipse meridiane****.*

Secțiunile făcute cu plane perpendiculare pe axa de rotație formează curbe-cercuri ce se numesc ***paralele****.*

Punctele de intersecție a axei de rotație cu suprafața elipsoidului se numesc ***poli*** *(P - polul nord și P′ - polul sud).*

Prin punctul *C* de pe elipsoid trec două secțiuni: secțiunea meridiană, care conține și axa *PP′*, și secțiunea primului vertical, perpendiculară pe secțiunea meridiană și care conține normala *CC′*.



a) Elipsa meridiană *b) Elipsoidul terestru*

Fig. 2.1. Elipsa meridiană și elipsoidul de rotație

2.1.2.1. *Elementele elipsoidului terestru*

Pentru a determina elipsoidul de rotație, este suficient să cunoaștem elementele elipsei meridiane (*figura 2.1.a*) prin rotirea căreia s-a format elipsoidul.

Ecuația elipsei meridiane în funcție de *semiaxa mare* (ecuatorială) *a* și *semiaxa mică* (*polară*) *b* este:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0 \tag{2.1}$$

Elementele *a* și *b* se determină pe baza multor măsurători terestre, executate în cursul a zeci de ani, cele mai recente folosind sateliți artificiali ai Pământului. În afară de mărimile *a* și *b*, elipsoidul de rotație este caracterizat și de alți parametri, ca turtirea α:

$$\alpha=\frac{a-b}{a} \tag{2.2}$$

respectiv prima excentricitate e^2 și a doua excentricitate e'^2:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2} \\ e'^2 &= \frac{a^2-b^2}{b^2}=\frac{a^2}{b^2}-1. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Cei cinci parametri *a*, *b*, α, e^2 și e'^2 sunt parametrii de bază ai elipsei meridiane, dintre care numai doi sunt independenți. Ecuația (2.1) a elipsei meridiane poate avea și alte forme, dacă se exprimă *a* și *b* în funcție de ceilalți parametri adimensionali, respectiv:

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} - a^2 = 0 \tag{2.4}$$

deoarece:

$$b^2 = a^2\left(1 - e^2\right). \tag{2.5}$$

Din a doua relaţie (2.3) rezultă:

$$b^2 = \frac{a^2}{1+e'^2}, \tag{2.6}$$

iar din relaţia (2.2):

$$b = a(1-\alpha) \tag{2.7}$$

care, înlocuită în prima relaţie (2.3), duce la:

$$e^2 = 1 - (1-\alpha)^2 = 2\alpha - \alpha^2 \tag{2.8}$$

ce mai poate fi scrisă în forma (2.9) după neglijarea termenului α^2, ca fiind de ordinul 10^{-3}:

$$e^2 \cong 2\alpha. \tag{2.9}$$

Între e^2 şi e'^2 poate fi stabilită relaţia:

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2}. \tag{2.10}$$

Valorile a, b şi α pentru câţiva elipsoizi de referinţă sunt date în *tabelul 2.1*.

Tabelul 2.1

Denumirea elipsoidului	Anul determinării	Semiaxa mare a (m)	Semiaxa mică b (m)	Turtirea α
Walbek	1819	6376896	6355833	1:302,8
Bessel	1841	6377397	6356079	1:299,2
Clarke	1880	6378249	6356515	1:293,5
Hayford	1906	6378283	6356868	1:297,8
Hayford	1909	6378388	6556912	1:297,0
Krasovski	1940	6378245	6356868	1:298,3
Int. 1980	1980	6378629	6357242,5	1:298,257

Deoarece diferenţa dintre semiaxa mare şi semiaxa mică este de numai 21 *km*, pentru unele calcule practice şi lucrări pe suprafeţe mici se consideră că forma Pământului este o sferă cu raza medie, pentru *elipsoidul Krasovski*, de 6371,11 *km*, de aici şi noţiunea de sferă terestră.

2.1.2.2. *Poziţia unui punct pe elipsoidul terestru*

Pentru detreminarea poziţiei punctelor pe suprafaţa elipsoidului terestru se folosesc coordonate geodezice sau geografice, sferice polare şi rectangulare.

2.1.2.2.1. *Coordonate geodezice (geografice)*

Coordonatele geodezice (geografice) sunt latitudinea φ şi longitudinea λ. ***Latitudinea*** *φ este mărimea unghiului pe care-l formează normala la suprafaţa elipsoidului în punctul dat (figura 2.1) cu planul ecuatorului*, iar ***longitudinea*** *este mărimea unghiului diedru format de planele primului meridian (meridianului origine) şi al meridianului punctului dat.* Latitudinea se consideră pozitivă pentru punctele care se află în emisfera nordică a suprafeţei elipsoidului faţă de ecuator şi negativă în cea sudică.

Longitudinea se consideră pozitivă pentru punctele situate la est de primul meridian şi negativă pentru punctele situate la vest de acesta.

2.1.2.2.2. *Coordonate sferice polare*

În cazul aproximării Pământului cu o sferă, se poate alege o axă polară diferită de axa de rotaţie PP', de exemplu QQ' (*figura 2.2*).

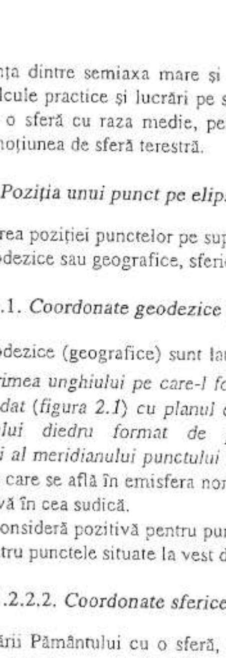


Fig. 2.2. Coordonatele sferice polare

În acest caz există alte puncte, linii, cercuri şi planuri caracteristice ce definesc sfera terestră. *Toate cercurile mari ce rezultă din intersecţia suprafeţei sferei cu planele care trec prin axa QQ'* se numesc ***verticaluri***. *Cercurile ce se* *obțin din intersecția suprafeței sferei cu planele perpendiculare pe axa QQ'* se numesc ***almucantarate***. Coordonatele sferice polare ale puctului C (*figura 2.2*) sunt ***distanța zenitală*** $Z(\widehat{QC})$ și ***azimutul*** A (de la meridianul PQL în sensul mișcării acelor de ceas). Legătura acestor coordonate cu latitudinea și longitudinea geografică se vede în *figura 2.3*.

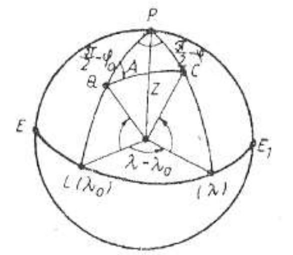


Fig. 2.3. Coordonatele geografice și coordonatele sferice polare

Punctul Q se numește *pol*. În funcție de latitudinea φ_0 a polului Q, există trei *sisteme de coordonate sferice polare* (dacă $\varphi_0 = \pm 90°$, polul Q coincide cu unul din polii geografici, *sistemul de coordonate* se numește *normal*; dacă $\varphi_0 = 0°$, Q este pe ecuator, *sistemul de coordonate* se numește *transversal*; dacă $0° < \varphi_0 < 90°$, *sistemul de coordonate* se numește *oblic*).

Aplicând formulele fundamentale ale trigonometriei sferice, legătura dintre coordonatele sferice și cele geografice este:

$$\begin{aligned} \cos Z &= \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda) \\ \sin Z \cos A &= \sin\varphi \cos\varphi_0 - \cos\varphi \sin\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda) \\ \sin Z \sin A &= \cos\varphi \sin(\lambda_0 - \lambda) \end{aligned} \tag{2.11}$$

2.1.2.2.3. *Coordonate rectangulare*

Coordonatele rectangulare spațiale în sistemul OXYZ (*figura 2.1*) sunt demonstrate în cursurile de geodezie și se pot scrie sub forma:

$$\begin{aligned} X &= \frac{a\cos\varphi\cos\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \\ Y &= \frac{a\cos\varphi\sin\lambda}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \\ Z &= \frac{a(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.1.2.3. *Razele de curbură ale elipsoidului terestru*

2.1.2.3.1. *Ecuațiile parametrice ale elipsoidului de rotație*

Fie ecuația (2.4) a elipsei meridiane, adică de forma implicită $f(x,y) = 0$. Din *figura 2.1.a* rezultă că panta tangentei în punctul C la elipsa meridiană este:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(90 + \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi. \tag{2.13}$$

Derivata dy/dx a funcției implicite (2.4) este:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'(x)}{f'(y)} = -\frac{2x}{\frac{2y}{1-e^2}} = -\frac{x(1-e^2)}{y}. \tag{2.14}$$

Din (2.13) și (2.14) rezultă:

$$\frac{x(1-e^2)}{y} = \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \tag{2.15}$$

sau, exprimând pe y:

$$y = x(1-e^2)\operatorname{tg}\varphi. \tag{2.16}$$

Înlocuind relația (2.16) în (2.4), rezultă:

$$x^2 + \frac{x^2(1-e^2)^2\operatorname{tg}^2\varphi}{1-e^2} = a^2$$

sau:

$$x^2\left[1 + (1-e^2)\operatorname{tg}^2\varphi\right] = a^2. \tag{2.17}$$

Înlocuind $\operatorname{tg}\varphi = \sin\varphi / \cos\varphi$ în (2.17) și grupând termenii în mod convenabil, rezultă:

$$\frac{x^2}{\cos^2\varphi}\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right) = a^2 \tag{2.18}$$

sau prima ecuație parametrică a elipsei meridiane:

$$x = \frac{a\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} = a\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}} \cos\varphi. \tag{2.19}$$

Înlocuind valoarea lui x din (2.19) în relația (2.16), rezultă cea de a doua ecuație parametrică a elipsei meridiane:

$$y = \frac{a\left(1 - e^2\right)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}} = a\left(1 - e^2\right)\left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.20}$$

Notând:

$$W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi} = \left(1 - e^2 \sin^2\varphi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.21}$$

relațiile (2.19) și (2.20) devin:

$$\begin{aligned} x &= a\, W^{-1} \cos\varphi \\ y &= a\left(1 - e^2\right) W^{-1} \sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Din *figura 2.1* se observă că abscisa x a punctului C este tocmai raza r a paralelului punctului C, adică:

$$r = a W^{-1} \cos\varphi. \tag{2.23}$$

Trecând la elipsoidul de referință, se ajunge ușor la relațiile (2.12) care mai pot fi scrise astfel:

$$\begin{aligned} X &= a W^{-1} \cos\varphi \cos\lambda \\ Y &= a W^{-1} \cos\varphi \sin\lambda \\ Z &= a\left(1 - e^2\right) W^{-1} \sin\varphi. \end{aligned} \tag{2.12'}$$

2.1.2.3.2. *Raze de curbură principale*

În *figura 2.4* se notează cu M raza de curbură a elipsei meridiane în punctul C de latitudine φ. Relația dintre variația latitudinii $d\varphi$ și variația ds a arcului este:

$$M = \frac{ds}{d\varphi} \tag{2.24}$$

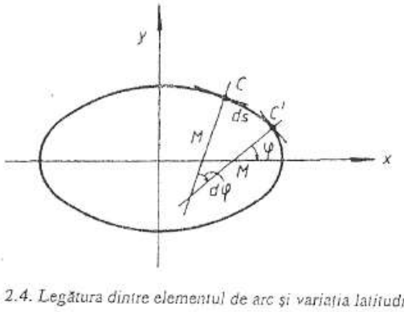


Fig. 2.4. Legătura dintre elementul de arc și variația latitudinii

Pe de altă parte, arcul ds poate fi exprimat de variațiile coordonatelor dx și dy:

$$ds = \left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

care, înlocuită în (2.24), duce la:

$$M = \frac{\left(dx^2 + dy^2\right)^{1/2}}{d\varphi}, \tag{2.26}$$

relație ce mai poate fi scrisă astfel:

$$M = \left[\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{2.27}$$

Mărimile $dx/d\varphi$ și $dy/d\varphi$ se obțin din derivarea relațiilor (2.19) și (2.20), adică:

$$\frac{dx}{d\varphi} = -a\left(1-e^2\right)\sin\varphi\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2}$$
$$\frac{dy}{d\varphi} = a\left(1-e^2\right)\cos\varphi\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2} \tag{2.28}$$

cu care relația (2.27) ridicată la pătrat devine:

$$M^2 = \left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = a^2\left(1-e^2\right)^2\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-3},$$

de unde raza de curbură M a elipsei meridiane este:

$$M = a\left(1-e^2\right)\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{-3/2} = a\left(1-e^2\right)W^{-3}. \tag{2.29}$$

În *figura 2.5* fie normala CD la suprafața elipsoidului terestru în punctul C de latitudine φ. Din fasciculul de plane ce trec prin normala CD, au importanță planul ce conține elipsa meridiană și planul perpendicular pe acesta sau secțiunea primului vertical.

Paralelul ce trece prin punctul C și primul vertical al aceluiași punct au tangenta T comună.

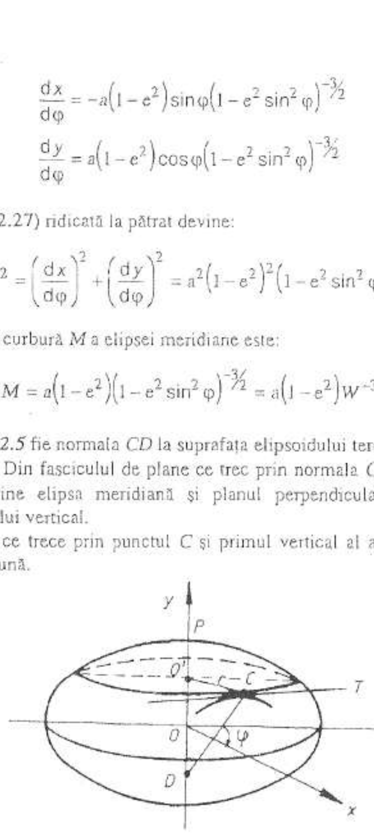


Fig. 2.5. Secțiunea primului vertical

Din *figura 2.5*, dacă $CD = N$, rezultă:

$$r = CD\cos\varphi = N\cos\varphi, \tag{2.30}$$

de unde raza de curbură N a primului vertical este:

$$N = r\cos^{-1}\varphi \tag{2.31}$$

sau, ținând seama de relația (2.32), rezultă:

$$N = aW^{-1}\cos\varphi\cos^{-1}\varphi = aW^{-1}. \tag{2.32}$$

Din relațiile (2.29) și (2.32), raportul $N:M$ este:

$$N:M = aW^{-1}:\left[a\left(1-e^2\right)W^{-3}\right] = W^2\left(1-e^2\right)^{-1}$$

sau:

$$N:M = W^2\left(1-e^2\right)^{-1} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2} = 1 + \frac{e^2\cos^2\varphi}{1-e^2} \tag{2.33}$$

din care rezultă $N:M \geq 1$, respectiv $N \geq M$.

La poli cele două raze de curbură au valori egale:

$$M = N = a\left(1-e^2\right)^{-1/2}. \tag{2.34}$$

La ecuator $(\varphi = 0)$, $M = a\left(1-e^2\right)$ și $N = a$.

2.2. Noțiuni despre reprezentarea unei suprafețe pe alta. Proiecția cartografică și ecuațiile ei

La construcția hărților se folosesc proiecțiile cartografice pentru a reprezenta elementele suprafeței elipsoidului terestru sau ale suprafeței sferei pe plan, la baza căreia se ia, de regulă, rețeaua de meridiane și paralele.

Oricărui punct $C(\varphi,\lambda)$ de pe suprafața elipsoidului, la reprezentarea pe plan, îi corespunde punctul $C'(X, Y)$. Aceleași considerente se mențin și dacă punctul C este dat prin coordonatele sferice polare $C(Z, A)$.

2.2.1. *Proiecția cartografică și ecuațiile ei*

Relațiile dintre coordonatele plane în sistemul hărții și coordonatele geografice, respectiv coordonatele sferice polare, reprezintă *ecuațiile hărții*, adică:

$$x = f_1(\varphi,\lambda)$$
$$y = f_2(\varphi,\lambda) \tag{2.35}$$

în care se înlocuiesc mărimile m, n şi i cu cele din relaţiile (3.4), (3.6) şi (2.51):

$$m = \frac{\sqrt{E}}{M} \tag{3.4}$$

$$n = \frac{\sqrt{G}}{r} \tag{3.6}$$

$$\sin i = \frac{H}{\sqrt{EG}} \tag{2.51}$$

şi rezultă:

$$p = \frac{\sqrt{E}}{M} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r} \cdot \frac{H}{\sqrt{EG}} = \frac{H}{Mr}. \tag{4.14}$$

Înlocuind în relaţia (4.14) pe H cu expresia sa obţinută din dezvoltarea expresiei (2.44) după înlocuirea lui E, G şi F cu expresiile (2.43), adică:

$$H = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial x}{\partial \lambda} \tag{2.44'}$$

rezultă:

$$p = \frac{1}{Mr}\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi}\right) \tag{4.15}$$

Dacă $p = 1$, atunci pentru elipsoid există relaţia:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = Mr \tag{4.16}$$

iar pentru sferă:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = R^2 \cos \varphi'. \tag{4.17}$$

Relaţiile (4.16) şi (4.17) sunt condiţiile diferenţiale ale reprezentării echivalente.

5. CLASIFICAREA PROIECŢIILOR CARTOGRAFICE

5.1. Generalităţi despre clasificarea proiecţiilor cartografice

Sistemul de proiecţie sau ***proiecţia cartografică*** este *procedeul matematic cu ajutorul căruia se reprezintă suprafaţa curbă a Pământului pe o suprafaţă plană*. Prin proiecţia cartografică se asigură corespondenţa între coordonatele terestre geografice (φ, λ) şi coordonatele rectangulare (x, y) de pe hartă.

Denumirea de proiecţie este adoptată în general atât pentru proiecţiile realizate prin metodele geometriei euclidiene (perspectivare), cât şi pentru toate reprezentările cartografice realizate prin alte metode, cu toate că s-a acceptat termenul general de ***proiecţie***.

Există numeroase clasificări ale proiecţiilor cartografice după diferite criterii, dar cursul se referă la criteriile uzuale: 1) natura deformărilor; 2) latitudinea φ_0 a polului $Q(\varphi_0, \lambda_0)$ al sistemului de coordonate sferice polare; 3) aspectul reţelei normale, formată din imaginile plane ale meridianelor şi paralelelor $(\text{când } \varphi_0 = \pi / 2)$ sau din imaginile plane ale verticalurilor şi ale almucantaratelor $(\text{când } \varphi_0 \neq \pi / 2)$.

5.2. Clasificarea după natura deformărilor

După *natura deformărilor*, ***proiecţiile cartografice*** se împart în trei mari grupe: 1) *proiecţii conforme* (echiunghiulare, ortogonale sau ortomorfe); 2) *proiecţii echivalente* (homalografice) şi 3) *proiecţii afilactice* sau *arbitrare*.

5.2.1. *Proiecţiile conforme*

Proiecţiile conforme *sunt proiecţiile în care figurile infinit mici de pe elipsoid sau de pe sferă se reprezintă pe plan prin figuri asemenea.*

Modulul de deformare liniară pe orice direcţie dusă dintr-un punct nu depinde de azimutul direcţiei, adică:

$$a = b = m = n = \mu \tag{5.1}$$

ceea ce face ca *elipsa deformaţiilor să fie un cerc*. Deoarece unghiurile se păstrează nedeformate, rezultă:

$$2\omega = 0 \quad \text{sau} \quad \omega = 0. \tag{5.2}$$

Elementele deformate sunt suprafețele și, respectiv, distanțele. Modulul de deformare areolară p, deoarece $m = n = \mu$ și $i = \pi / 2$, în relația (3.19) este:

$$p = \mu^2 \tag{5.3}$$

Sunt satisfăcute *relațiile Cauchy-Riemann* (4.14) pentru elipsoid sau (4.13) pentru sferă.

5.2.2. *Proiecțiile echivalente*

***Proiecțiile echivalente** păstrează nedeformate ariile, atât ale figurilor infinit mici cât și ale figurilor mai mari (cu suprafețe finite).* Condiția de păstrare nedeformată a ariilor este:

$$p = ab = 1\,, \tag{5.4}$$

respectiv:

$$p = mn \sin i = 1 \tag{5.5}$$

dacă imaginile meridianelor și paralelelor fac între ele unghiurile $i = \pi / 2$.

Din relația (5.4) rezultă:

$$a = 1 / b$$

$$b = 1 / a, \tag{5.6}$$

în care $a = \mu_{max}$ și $b = \mu_{min}$.

Deformația unghiulară ω se determină cu relația (3.56):

$$\mathrm{tg}^2(\pi / 4 + \omega / 4) = \frac{a}{b} \tag{3.56}$$

care, cu relațiile (5.6), devine:

$$\mathrm{tg}^2(\pi / 4 + \omega / 4) = a^2. \tag{5.7}$$

Relațiile diferențiale ale reprezentării echivalente sunt cele arătate în § 4.2, respectiv (4.16) pentru reprezentarea suprafeței elipsoidale:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = Mr \tag{4.16}$$

și (4.17) pentru reprezentarea suprafeței sferice:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = R^2 \cos \varphi'. \tag{4.17}$$

5.2.3. *Proiecțiile arbitrare*

*Proiecțiile **arbitrare** sunt proiecțiile care nu păstrează nedeformate nici unghiurile, nici suprafețele.* Din acest grup de proiecții fac parte și ***proiecțiile echidistante***, care se caracterizează prin aceea că *păstrează nedeformate lungimile pe una din direcțiile principale (în lungul meridianelor, respectiv în lungul paralelelor și în lungul almucantaratelor)*, adică pe aceste direcții modulul de deformare a lungimilor este egal cu unitatea ($\mu = 1$). ***Proiecțiile ortodromice***, componente ale proiecțiilor arbitrare, reprezintă ***ortodroma*** (*drumul cel mai scurt dintre două puncte*) sub forma unei linii drepte.

5.3. Clasificarea după latitudinea polului sistemului de coordonate sferice polare

Poziția unui punct pe suprafața Pământului, așa cum s-a arătat la punctul 2.1.2.2.2, poate fi dată prin coordonatele sferice polare (*distanța zenitală Z* și *azimutul A*, *figura 2.2*), cu polul $Q(\varphi_0, \lambda_0)$. Reprezentarea suprafeței Pământului se poate face pe un plan sau pe o suprafață desfășurabilă (con sau cilindru). Poziția polului Q_0 al proiecției față de suprafața pe care se face reprezentarea determină mai multe tipuri de proiecții cartografice, și anume: 1) proiecții drepte (normale sau polare), când $\varphi_0 = \pi / 2$; 2) proiecții oblice, când $0 < \varphi < \pi / 2$; 3) proiecții transversale (sau ecuatoriale), când $\varphi_0 = 0$.

Tipurile descrise sunt arătate în *figura 5.1*.

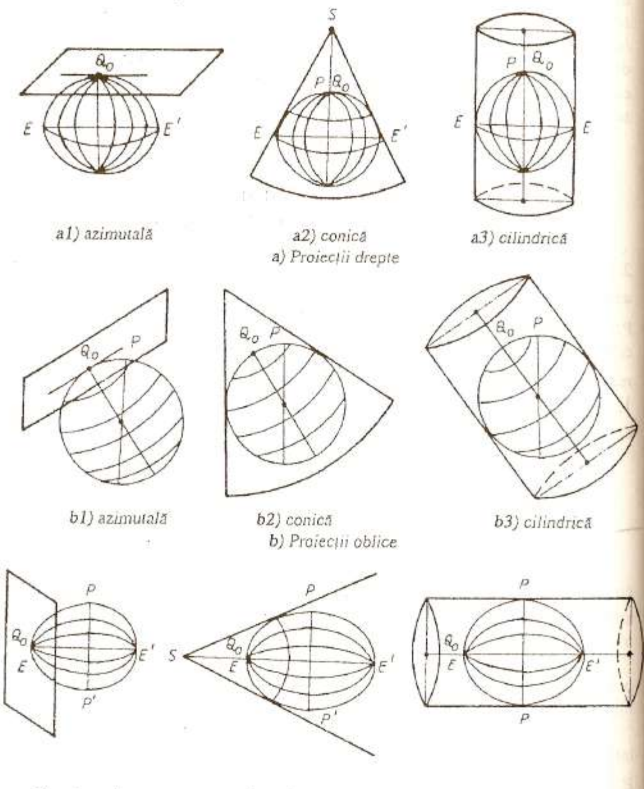
5.4. Clasificarea după aspectul rețelei cartografice normale

Punctele elipsoidului terestru sau ale sferei terestre pot fi date prin coordonatele geografice (φ, λ) sau prin coordonatele sferice polare (Z, A), ambele tipuri de coordonate fiind curbilinii, dar între care existând relații matematice.

*Imaginea plană a rețelei de meridiane și paralele se numește **rețea principală**, iar imaginea plană a rețelei de verticaluri și almucantarate se numește **rețea normală**.*

Rețeaua normală are aspectul cel mai simplu. În particular, când latitudinea polului Q_0 este egală cu $\pi / 2$, polul Q_0 coincide cu polul geografic P și, ca urmare, rețeaua normală coincide cu rețeaua principală. În proiecțiile oblice și transversale (*figura 5.1.b, c*), cele două rețele sunt distincte.

În funcție de aspectul rețelei normale există mai multe tipuri de proiecții, care sunt prezentate pe cazul simplificat când sistemul normal coincide cu sistemul principal $\left(\varphi_0 = \pi / 2\right)$.



a1) azimutală a2) conică a3) cilindrică

a) Proiecții drepte

b1) azimutală b2) conică b3) cilindrică

b) Proiecții oblice

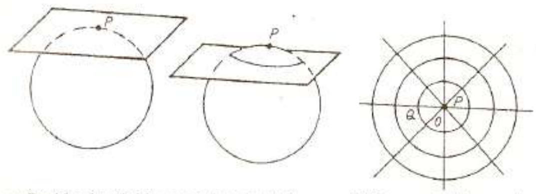
c1) azimutală c2) conică c3) cilindrică

c) Proiecții transversale

Fig. 5.1. Tipuri de proiecții după poziția polului Q_0

5.4.1. *Proiecțiile azimutale*

Proiectarea se face pe un plan. Se numesc **azimutale** deoarece *în punctul central azimutele sunt păstrate nedeformate*. Rețeaua normală se reprezintă sub formă de cercuri concentrice și drepte concurente în punctul central (*figura 5.2.b*).



a) Poziția planului la proiecția azimutală b) Forma rețelei normale

Fig. 5.2. Proiecția azimutală

Proiecțiile **azimutale** pot fi *perspective* și *neperspective*. În proiecțiile azimutale perspective proiectarea se face după legile perspective liniare, iar punctul de vedere este situat pe perpendiculara pe planul proiecției în polul proiecției.

5.4.2. *Proiecțiile cilindrice*

Proiectarea se face pe suprafața unui cilindru care poate fi tangent sau secant la suprafața elipsoidului sau sferei. Rețeaua normală este reprezentată prin două fascicule de drepte paralele, direcțiile fasciculelor fiind reciproc perpendiculare (*figura 5.3*).

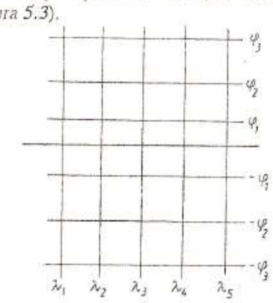


Fig. 5.3. Aspectul rețelei normale (principale) în proiecția cilindrică

5.4.3. *Proiecțiile conice*

Reprezentarea se face pe suprafața (desfășurabilă) a unui con. După poziția conului față de sfera terestră (tangent sau secant), proiecțiile conice pot fi tangente sau secante. După unghiul făcut de axa conului cu axa polului, *proiecțiile conice* pot fi *normale* (drepte), *ecuatoriale* (transversale) sau *oblice*.

În cazul *proiecțiilor conice normale* sau drepte $\left(\varphi_0 = \pi / 2;\ Q_0 \equiv P\right)$, arcele de cercuri concentrice reprezintă *paralelele*, iar dreptele concurente (*figura 5.4*) reprezintă *meridianele*.

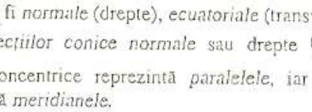


Fig. 5.4. Aspectul rețelei normale (principale) în proiecția conică dreaptă

Distanțele dintre imaginile paralelelor și valorile unghiulare dintre dreptele imagini ale meridianelor depind de parametrii conului adoptat și poziția acestuia față de elipsoid sau sferă.

5.4.4. *Proiecțiile policonice*

Pentru reprezentarea unor porțiuni mai mari ale Pământului, se folosesc mai multe conuri tangente sau secante la paralele foarte apropiate. Vârfurile conurilor se găsesc pe aceeași dreaptă. În cazul *proiecțiilor policonice drepte*, paralelele se reprezintă prin arce de cerc excentrice, meridianul mediu printr-o dreaptă pe care se găsesc și arcele cercurilor imagini ale paralelelor, iar celelalte meridiane prin curbe simetrice față de dreapta imagine a meridianului mediu (*figura 5.5*).

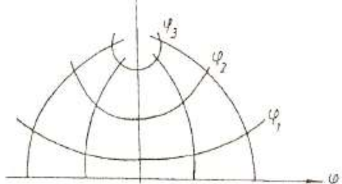


Fig. 5.5. Aspectul rețelei normale în proiecția policonică (dreaptă)

5.4.5. *Proiecțiile convenționale*

Sunt construite prin metode speciale, specifice fiecărei proiecții. În cadrul acestor proiecții intră și *proiecțiile pseudocilindrice, pseudoconice, circulare* etc. *Proiecțiile pseudocilindrice* (drepte) se aseamănă cu proiecțiile cilindrice (drepte) doar prin modul de reprezentare al paralelelor, ca drepte paralele între ele și perpendiculare pe dreapta imagine a meridianului mediu al zonei de cartografiat (de exemplu, *proiecția Sanson*, la care imaginile meridianelor sunt sinusoide, imaginea meridianului mediu este o dreaptă, iar imaginile paralelelor formează un fascicul de drepte paralele, *figura 5.6*).

Fig. 5.6. Aspectul rețelei normale în proiecția Sanson

Proiecțiile pseudoconice (drepte) se aseamănă cu proiecțiile conice (drepte) doar prin reprezentarea paralelelor, ca arce de cercuri concentrice. Imaginea meridianului mediu este o dreaptă, iar imaginile celorlalte meridiane sunt curbe simetrice față de imaginea meridianului mediu. Imaginile paralelelor sunt arce de cerc cu centrele pe imaginea meridianului mijlociu.

Proiecția Bonne, folosită în trecut în țara noastră, este o *proiecție pseudoconică echivalentă* (*figura 5.7*).

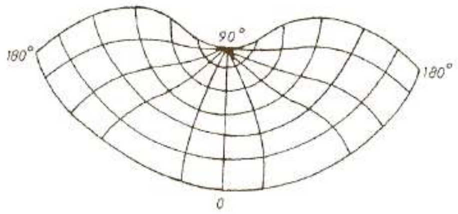


Fig. 5.7. Aspectul rețelei normale (drepte) în proiecția pseudoconică echivalentă Bonne

În *proiecțiile circulare*, imaginile meridianelor și paralelelor sunt arce de cerc.

5.4.6. *Proiecțiile poliedrice*

Se aseamănă cu proiecțiile policonice. Proiectarea se face pe o suprafață poliedrică, ale cărei vârfuri sunt dispuse pe suprafața elipsoidului sau sferei (poliedrul fiind înscris în elipsoid sau sferă) sau în afara acestora, dar fețele poliedrului să fie tangente la elipsoid sau sferă.

5.4.7. *Proiecțiile derivate*

Derivă din alte proiecții cunoscute, prin modificarea unor parametri, ceea ce duce la reprezentarea diferită a rețelei normale. Ca exemple se pot da *proiecțiile Aitov, Eckert-Goode, Mollweide-Goode* etc.

Capitolul II

REPREZENTAREA ELIPSOIDULUI PE SFERĂ

6. REPREZENTAREA CONFORMĂ A ELIPSOIDULUI PE SFERĂ

6.1. Considerații generale ale reprezentării elipsoidului pe sferă

În unele cazuri, proiecțiile cartografice presupun reprezentarea pe plan a suprafeței sferice. De regulă, coordonatele punctelor se determină pe suprafața unui elipsoid de referință. Ca atare, este necesară trecerea de la coordonatele φ, λ definite pe elipsoidul de referință la coordonatele φ', λ' definite pe sferă, cu alte cuvinte reprezentarea elipsoidului pe sferă.

La reprezentarea suprafeței elipsoidului pe suprafața sferei sunt respectate următoarele condiții generale:

- centrele elipsoidului și sferei coincid;
- elipsoidul și sfera au aceeași axă a polilor;
- planurile meridianelor, de regulă, coincid;
- planul ecuatorial al sferei coincide cu planul ecuatorial al elipsoidului.

Se poate considera că relațiile generale ale reprezentării elipsoidului pe sferă sunt:

$$\lambda' = \alpha\lambda$$
$$\varphi' = f(\varphi'), \qquad (6.1)$$

unde α = const., f este o funcție arbitrară, finită și continuă.

Prezintă interes *reprezentările conformă și echivalentă* ale elipsoidului pe sferă.